DEVOIR DE NIVEAU **Durée : 4H**

28 NOVEMBRE 2014

MATHEMATIQUES

SERIE C

Cette épreuve comporte quatre (04) pages Numérotées 1/4,2/4,3/4 et 4/4.

Toute calculatrice scientifique est autorisée

EXERCICE 1

I-Pour tout nombre entier naturel n non nul, on considère les nombres $a_n = 4\times 10^n - 1$, $b_n = 2\times 10^n - 1$ et $c_n = 2\times 10^n + 1$.

1-a)Montrer que a_n est divisible par 3.

b)Montrer que pour tout nombre entier naturel n non nul, $b_n c_n = a_{2n}$.

2-a)Montrer que $PGCD(b_n;c_n) = PGCD(c_n;2)$.

b) Justifier que b_n et c_n sont premiers entre eux.

c)En déduire que 1999 et 2001 sont premiers entre eux.

II-On considère l'équation $(E): 1999x + 2001y = 10000$, où les inconnues x et y sont des entiers relatifs.

1-a)Donner une solution particulière de (E).

b) Résoudre (E).

2-Au VII^e siècle, une légende racontait qu'un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 10000 pièces de monnaie dans une auberge .Les hommes ont dépensés 1999 pièces chacun et les femmes 2001 pièces chacune.

Cette légende est t- elle erronée ? Si non combien pouvait t- il avoir d'hommes et de femmes ?

EXERCICE 2

Soient A , B, C trois points non alignés du plan tel que ABC ne soit pas équilatéral .On désigne par A', B' et C' les milieux respectifs des segments $[BC]$; $[CA]$ et $[AB]$.On pose $a = BC$; $b = CA$ et $c = AB$.

On considère le vecteur $\vec{u} = a^2\overrightarrow{BC} + b^2\overrightarrow{CA} + c^2\overrightarrow{AB}$.

a) Montrer que $\vec{u} = (a^2 - b^2)\overrightarrow{AC} + (c^2 - a^2)\overrightarrow{AB}$.

b) En déduire que $\vec{u}$ n'est pas nul.

1- Pour tout pont M du plan on pose : $f(M) = a^2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{MA'} + b^2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{MB'} + c^2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MC'}$.

a) Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Calculer f(O).

b) Soit G le centre de gravité du triangle ABC.

-Montrer que : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{GA'} = \frac{1}{6}(b^2 - c^2)$. On admettra que $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{GB'} = \frac{1}{6}(c^2 - a^2)$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{GC'} = \frac{1}{6}(a^2 - b^2)$.

-En déduire f(G).

c)Montrer que : $f(A) = \frac{1}{2}\left[b^2(a^2 - b^2) + c^2(c^2 - a^2)\right]$ et justifier que : $f(A) \neq 0$.

d) Montrer que $f(M) = \vec{u}.\overrightarrow{MA} + f(A)$.

e)Déterminer et construire alors l'ensemble (D_1) des points M du plan tels que $f(M) = 0$.

3-On suppose a présent que $b = c$ et on désigne par (D_2) l'ensemble des points M du plan tels que $f(M) = \frac{(b^2 - a^2)a^2}{2}$.

a)Déterminer $\vec{u}$ et $f(A)$.

b) Déterminer et construire (D_2).

PROBLEME

Le plan est muni du repère orthonormés $IR = (O ;I ;J)$, l'unité graphique est égale à 2 cm . Soit f une application de IR dans IR deux fois dérivable sur IR. On désigne par (C), la courbe représentative de f. On considère le réel x_0 , le point M_0 de (C) d'abscisse x_0 et (Δ) la tangente à (C) en M_0.

Partie A

On suppose que pour tout réel x ,on a $f'(x) > 0$. Soit g la fonction dérivable sur IR et définie par : $g(x) = f\left(\frac{x + x_0}{2}\right) - \frac{f(x) + f(x_0)}{2}$.

1-Déterminer g'.

2-Montrer que l'on a : $\begin{cases} g'(x) > 0 & si \quad x < x_0 \\ g'(x_0) = 0 & \\ g'(x) < 0 & si \quad x > x_0 \end{cases}$.

3-a)Dresser le tableau de variation de g.

b) Déduire que pour tout réel x, on a : $f\left(\dfrac{x+x_0}{2}\right) \leq \dfrac{f(x)+f(x_0)}{2}$.

Partie B

On suppose maintenant que la dérivée seconde f'' satisfait a : $\begin{cases} f''(x) < 0 & si \quad x < x_0 \\ f''(x_0) = 0 & \\ f''(x) > 0 & si \quad x > x_0 \end{cases}$.

1-Soit h la fonction : $x \mapsto f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$.

a)Démontrer que h est deux fois dérivable sur IR.

b) Montrer que $\forall x \in IR \quad ; \quad h''(x) = f''(x)$.

c)Calculer $h'(x_0)$ puis en déduire les variations de h.

d) Justifier que : $\forall x \in \left]-\infty ; x_0\right[; h(x) < 0$ et $\forall x \in \left]x_0 ; +\infty\right[; h(x) > 0$.

2-Etudier la position relative de (C) par rapport à (Δ).

Partie C

On suppose que pour tout réel x ,on a $f''(x) < 0$.

Soit j la fonction : $x \mapsto f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) - f(x)$ et (C_j) sa courbe représentative .*On admet que j est deux fois dérivable sur IR.*

1- a) Montrer que $\forall x \in IR \quad ; \quad j''(x) = -f''(x)$.

b) Calculer $j'(x_0)$ puis en déduire les variations de j.

2-Etudier la position relative de (C_j) par rapport à (Δ).

Partie D

Soit k la fonction dérivable sur IR et définie par : $k : IR \to IR$

$x \mapsto \sin 2x + 2\sin x$.

On désigne par (C_k),la courbe représentative de f.

1-a)Résoudre dans IR , l'équation : $4x^2 + 2x - 2 = 0$.

b)En déduire que la solution sur $[0;\pi]$ de l'inéquation : $-4\cos^2 x - 2\cos x + 2 < 0$ est $\left[0;\frac{\pi}{3}\right[$.

2-Montrer que l'étude de k peut se restreindre à $[0;\pi]$.

3-a)Montrer que : $\forall x \in [0;\pi]; k'(x) = 4\cos^2 x + 2\cos x - 2$.

b) Dresser le tableau de variation de k.

4-a) Donner une équation de la tangente (T) à (C_k) au point d'abscisse 0.

b) Etudier le signe de k'' sur $[0;\pi]$.

c)En déduire la position relative de (C_k) par rapport à (T).

5-Tracer (T) et (C_k) .